Suites définies par récurrence (40 Dév)

Thm : Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : [0,b) \to \mathbb{R}$ continue croissante vérifiant :

(i) $\forall x \in]0,b]$, $f(x) < x$ et $f(0) = 0$

(ii) $\exists \lambda > 0$, $r > 1$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \lambda x^r + o(x^r)$.

→ si $c \in]0,b[$, $\begin{cases} u_0 = c \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ alors (u_n) est à valeurs dans $]0,b[$, de limite 0 et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{1/(r-1)}}$ avec $K = (\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$.

→ Si $f : x \mapsto \ln(1+x)$, alors $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.

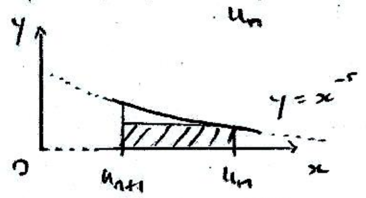
→ si $\begin{cases} v_0 = d \in \mathbb{R}_+ \\ v_{n+1} = v_n + \exp(-v_n^2) \end{cases}$, alors $v_n \to +\infty$ et plus précisément $v_n \sim (\ln n)^{1/2}$.

→ Puisque f est croissante, si on avait $f(y) = 0$, $y \in]0,b[$, alors f serait nulle sur $[0,b]$, ce qui est absurde puisque $f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \lambda x^r + o(x^r)$.

Ainsi, $\forall x \in]0,b[$, $0 < f(x) < x < b$; donc f laisse $]0,b[$ stable, i.e. (u_n) bien déf.

De plus, (u_n) est décroissante ($u_{n+1} = f(u_n) < u_n$) minorée par 0, donc converge vers $l \in \overline{]0,b[} = [0,b]$, point fixe de f par continuité : $l = 0$: $u_n \longrightarrow 0$.

D'après (ii), $\frac{f(u_n) - u_n}{u_n^r} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^r} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\lambda$



Ici, l'aire hachurée vaut $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r}$

la figure suggère : $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{dt}{t^r} = \frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{1-r}$

En effet, $\frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{1-r} = \frac{1}{1-r}\left(u_n^{1-r} - (u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r))^{1-r}\right) = \frac{1}{1-r}\left(u_n^{1-r}\left(1 - (1 - \lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1}))^{1-r}\right)\right)$

$= \frac{1}{1-r}\left(u_n^{1-r}\left((1-r)\lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \lambda + o(1)$.

Par équivalence de sommes partielles pour les séries divergentes :

$\frac{u_0^{1-r} - u_n^{1-r}}{1-r} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k^{1-r} - u_{k+1}^{1-r}}{1-r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda = n\lambda$, puis $u_n \sim \frac{1}{((r-1)\lambda n)^{1/(r-1)}}$

→ L'application $x \mapsto \ln(1+x)$ vérifie les points ci-dessus et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, ce qui assure $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

Ici, $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2)} - 1\right) = \frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{1}{4}u_n^2 + o(u_n^2)\right) \sim \frac{1}{2} - \frac{u_n}{12}$

En posant $x_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2}$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-u_n}{12} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n}$, donc par équivalence des sommes partielles pour les séries divergentes, $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} x_k \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{2} - \frac{1}{6}\ln n + o(\ln n)$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{6}\ln n + o(\ln n)\right)^{-1} = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{\ln n}{3n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.

L'application $g : x \mapsto x + e^{-x^2}$ stabilise $\mathbb{R}_+$.
(v_n) est strictement croissante, donc converge vers $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Or $l \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow g(l) = l$ par continuité $\Rightarrow e^{-l^2} = 0$ absurde.
Donc $v_n \longrightarrow +\infty$.

Comme précédemment, on intuite $1 = (v_{n+1} - v_n) e^{v_n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2} dt$

Or $\int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{2t}{2t} e^{t^2} dt = \frac{e^{v_{n+1}^2}}{2v_{n+1}} - \frac{e^{v_n^2}}{2v_n} + \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt$.

et $\frac{\int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2}/2t^2 \, dt}{\int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2} dt} \leq \frac{e^{v_{n+1}^2}(v_{n+1} - v_n)/2v_n^2}{e^{v_n^2}(v_{n+1} - v_n)} = \frac{e^{v_{n+1}^2 - v_n^2}}{2v_n^2} = \frac{e^{2v_n e^{-v_n} + e^{-2v_n}}}{2v_n^2} \longrightarrow 0$

Donc $\int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt = o\left(\int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2} dt\right)$ puis $\int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2} dt \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e^{v_{n+1}^2}}{2v_{n+1}} - \frac{e^{v_n^2}}{2v_n}$.

Or $\frac{e^{v_{n+1}^2}}{2v_{n+1}} - \frac{e^{v_n^2}}{2v_n} = \frac{\exp(v_n^2 + 2v_n e^{-v_n^2} + e^{-2v_n^2})}{2v_n + 2e^{-v_n}} - \frac{e^{v_n^2}}{2v_n}$

$= \frac{e^{v_n^2}}{2v_n}\left(1 + 2v_n e^{-v_n^2} - 1 + o(v_n e^{-v_n^2})\right) = 1 + o(1)$.

Donc (l'intuition étant bonne), par équivalence des sommes partielles :

$$\frac{e^{v_n^2}}{2v_n} - \frac{e^{v_0^2}}{2v_0} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{v_{k+1}^2}}{2v_{k+1}} - \frac{e^{v_k^2}}{2v_k} \sim \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

De là, $\frac{e^{v_n^2}}{2v_n} \sim n$, puis, puisque $\ln(v_n) = o(v_n^2)$, $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} (\ln n)^{1/2}$.